1次元複素多様体の可視化をめぐって

宮澤　篤
ゲーム学科

Visualization of a One-Dimensional Complex Manifold

MIYAZAWA Atsushi
Department of Game

(Received November 1, 2013 ; Accepted January 9, 2014)

Abstract　From prehistoric paintings on cave walls to modern flat panel displays, plane media have always been a versatile means for showing projected images of three-dimensional objects. If dimensional analogy is correct, one may suppose that stereoscopic displays could be used to represent the projection into three dimensions of objects from a four-dimensional world. Adding one more dimension will bring various benefits. For instance, it is well known that the calculation of total circuit impedance can be simplified by using complex number representation. However, it is generally not easy for us, living in three-dimensional space, to use our intuitive imagination to understand the four-dimensional world. A story about a square that lives in a two-dimensional world, which was narrated by Edwin Abbott Abbott in the book "Flatland," is almost the only glimpse for non-mathematicians of a shift into higher dimensions. In 1982, the author attempted to present complex functions graphically by superimposing graphs of the functions that map a real part of a complex number to a complex number. By making the most of today's advances in stereoscopic systems, we can understand the projection of a one-dimensional complex manifold more intuitively. The purpose of this paper is to introduce some studies relating to the visualization of a one-dimensional complex manifold, and to discuss analytical approaches and methodologies. Using recent stereoscopic systems to gain another view of classical mathematics may contribute to educational improvement.

1. まえがき

よく知られているように、方程式 $x^2+1=0$ は実数の範囲では解をもたない。そこで、関係式 $i^2+1=0$ を満たすような虚数単位 i を含むように数の次元を1つ上げて、$a+ib$ の形の複素数を得たのであるが、たとえば交流回路の複素インピーダンス計算を楽に行えることなど、“次元を上げると、こんなにいいことがある”のが示される。言い換えると、新しい理論やものの見方は、数学や物理学の視野を拡大するものでなければならないが、たとえそれらが合理的に有用なものとして受け入れられたとしても、そもそも2次元しか見えない3次元空間の住人が4次元空間を理解しようとするのは容易なことではない。ここでは、4次元図形の直観像を得るための1つの方法として、複素初等関数の可視化と、その“媒介変数で表された”または“極座標で表された”平面曲線への応用を、映像作品の上映を通じて改めて論じてみたい。

2. 関数 $\sqrt{z}$ を描く

複素1変数関数

$$w=u+iv=f(z)=f(x+iy)$$

のグラフが、4次元空間 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$ 内の2次元の点集合で表せることは周知のとおりである。これは独立変数（x, y）の次元からグラフの自由度が2であるとも言えるし、あるいは f を2つの実2変数関数の組（u, v）と考えて、これらの拘束条件

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y)$$

の数から $4-2=2$ とも解釈することができる。

さて複素関数を視覚化する1つの方法として、関数値 w の絶対値を使って、$x, y, |w|$ の3本の軸でグラフを描く試みがある[2)]。図1は $|\cos z|$ のグラフであるが、無理なく $\boldsymbol{R}^3$ の中に実現することができる。おおむねこれは有用な方法であり、この図からも実軸上では振動し、虚軸方向には発散する三角関数の特徴を把握することができる。

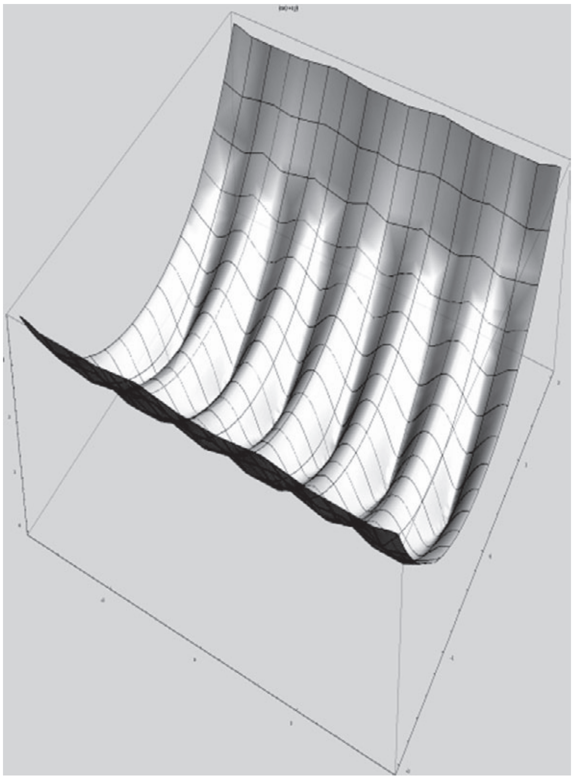

図1　$|\cos z|$ のグラフ

しかし「絶対値」とは換言すれば「原点からの距離」のことであるから、この方法では関数値の偏角の情報が失われること、1位の零点（$x=(2\pi+1)\pi/2, n\in\boldsymbol{Z}$）が特異点（微分不可能な点）に化けてしまうこと、多価関数であっても時には1価化されて描かれることなど、位相的にも真のグラフからはおよそかけ離れた格好であることに、注意しなければならない。

それではじめから実数値しかとらない関数を相手にすればいいわけであるが、すると最もなじみの深いありとあらゆる解析関数の視覚化を、すべて断念せざるを得ないハメに陥る。

（開集合上での）微分可能性、CR（コーシー・リーマン）方程式、べき級数展開可能性（解析性）等が互いに同値であるという実解析では思いもよらない美しい定理が複素解析の出発点であるが、このことから実数値関数ならば $v=v(x, y)=0$ であるから CR 方程式（$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$）より、$u_x=0, u_y=0$。これは定数関数以外ではあり得ない。3本の軸で解析関数を描くもくろみそれ自体が、もともと矛盾をはらんでいたのである。

“少々難あり”とはいえ、上で見た「絶対値曲面」は値域を1次元化した写像 $|f|: \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ を考えることで複素関数の定性的な表現に成功していると言える。これとは逆に、$\boldsymbol{z}$ 平面上の偏角一定の半直線 $\boldsymbol{A}=\{z=re^{i\theta};\ \theta$ は一定$\}$ 上に制限した写像、$|f|_A: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ いわゆるベクトル値関数のグラフから、たとえば $\sqrt{z}$、あるいはもっと一般にべき関数 $f(z)=z^\alpha, \alpha\in\boldsymbol{R}$ のグラフを構成することができる。

定義域を実軸上に制限した

$$f_{|X}: X \to U \times V$$

のグラフならば無理なく $\boldsymbol{R}^3$ の中に図示することができて、これは $x\geq 0$ では u 軸と、$x\leq 0$ では v 軸とでおなじみの放物線を描く。次にどこか水平方向に y 軸をとって、平面を思い浮かべながらこの上で徐々に定義域を原点回りに回転させ——この関数、極形式では（$w=q\,e^{i\psi}=f(z)=f(p\,e^{i\varphi})$ として）

$$qe^{i\psi}=\sqrt{p}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

であるから z 平面上での回転量の半分を w 平面上、つまり放物線の軸の回りに与えてやる——この偏角一定の直線上に制限したときのグラフを次々に描き、ぐるっと一気に $\boldsymbol{R}^3$ の中へ回し込んでしまえばよい（図2）。

グラフの1つの効用は、虚根の図表示[3)]である。グラフを構成している曲線の各々は、今でこそ単一の $\boldsymbol{R}^3$ の中に同居しているが、もとはそれぞれ別の $\boldsymbol{R}^3$（非可算個）に入っていると見るべきである。そしてべき関数 $\sqrt[n]{z}$ の場合には、空間 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$ の中に n 本のブランチが入ることがすぐに分かる。図2からは、グラフと w 平面とがべったりと交わりそうな印象を受けるが、$\boldsymbol{R}^3$ の中には本来 n 本のブランチしか入れないので、高々 n 個の交点が現れるのみである（図3は、試みに3次方程式 $z(z^2-3)=-8$ の根の位置を描いたもの——1実解と

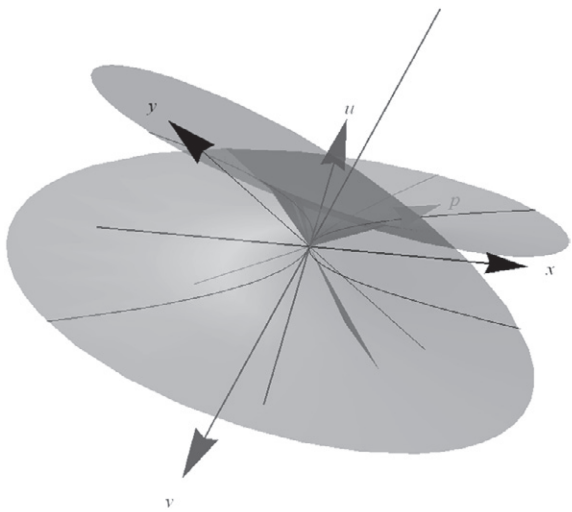

図2　極形式による、分数べき関数（平方根）のグラフを構成しているところ

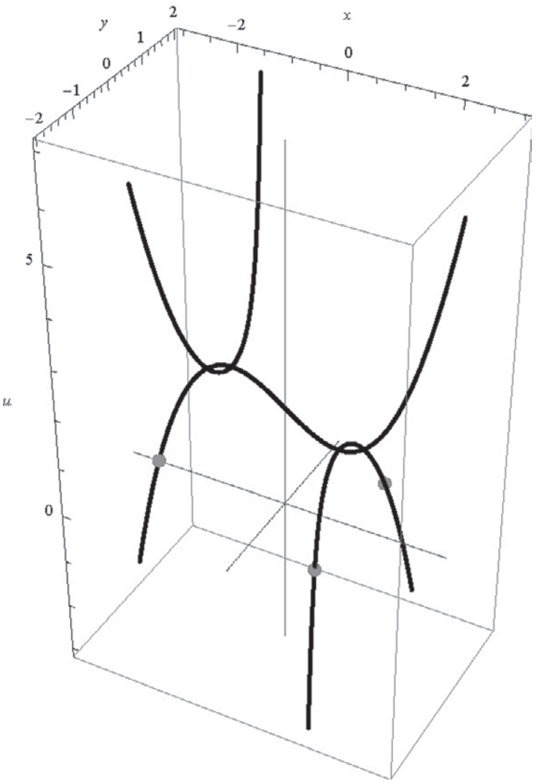

図３　３次方程式 $z(z2-3)=-8$ の根の位置

互いに共役な２複素解を認めることができる)。

最後に負べきの例として、1/z のグラフを掲げる（図４)。$q\,e^{i\phi}=1/p\,e^{i(-\varphi)}$ から、z 平面上と w 平面上とでは回転の向きが逆になり、実関数のときの右側の双曲線（$x>0$）が紙の向こう側へ倒れながら回転して、左側の双曲線に一致する、そんな感じであろうか。

3.　振動と発散が同居する周期関数

一般に、与えられた関数が $f(z)=f(x)e^{i\theta}$, $x\in\boldsymbol{R}$ の格好に変形できれば、ただ見なれた実軸上での姿（$f(x)$）そのままを、４次元空間の中で適当な方向へ回して（$\times e^{i\theta}$）やるだけで、$f(z)$ のグラフを得ることができるはずである。いわば無限次のべき関数に相当する指数関数は、直交形式によって見通しのいいものになる。

$$\begin{aligned} e^{z} &= e^{x+iy}\,(=f(x)e^{iy}) \\ &= e^{x}(\cos y + i\sin y) \end{aligned}$$

$y=n\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$ でこれは実数値をとるから、３次元空間 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{U}$ の中では、e^{x} のグラフが虚軸上にずらりと並び、e^{z} の直交形式のグラフは、回転しながらこれらを周期的に補間していく（図５)。

また、基本的に三角関数が直交形式であることは、加

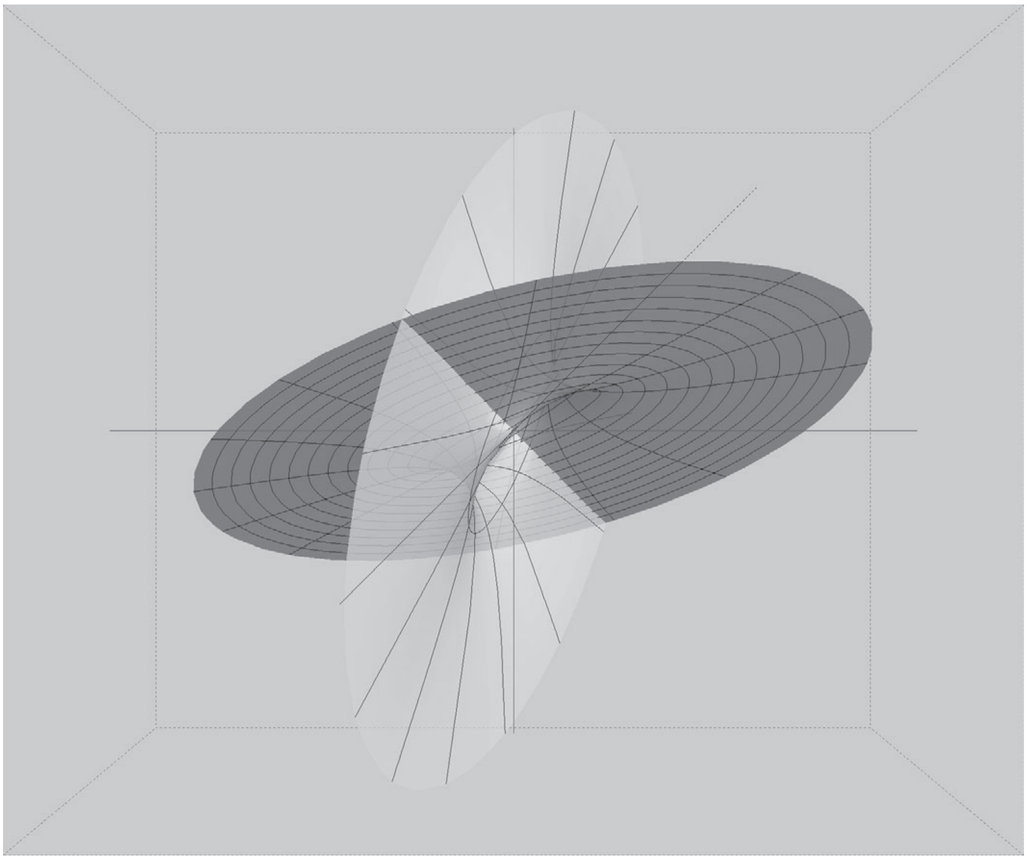

図４　1/z（逆数）のグラフ（負べきの例として）

法定理の成立そのものと言える。

$$\cos z = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$$
$$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y)$$

であるから、$x=n\pi$ では u 軸と cosh、$x=n\pi/2$ では v 軸と sinh、２つの双曲線関数のグラフが虚軸方向には交互に出現するのがわかる（図６）。

4. 平面代数曲線への応用

平面代数曲線とは、直線 $x+y-1=0$ や円 $x^2+y^2-1=0$、デカルトの正葉線 $x^3+y^3-3axy=0$ のように、既約な２変数多項式 $F(x,y)$ の零点集合

$$\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 | F(x,y)=0\}$$

のことである。“代数曲線の織りなす様々な美しい図形は、人々の感性に訴え、深い感動を与えてきた”[6]とされるが、ここで多項式を複素変数

$$F(z,w)=0,\ z=x+iy,\ w=u+iv$$
$$(x,y,u,v\in \boldsymbol{R})$$

と考えれば、代数曲線は虚軸方向にも広がりを持つ曲面（４次元空間

$$\boldsymbol{X}(=\{(x,0,0,0)\})\times \boldsymbol{Y}(=\{(0,y,0,0)\})\times$$
$$\boldsymbol{U}(=\{(0,0,u,0)\})\times \boldsymbol{V}(=\{(0,0,0,v)\})$$

内で２次元的広がりを持つ集合）と考えられる[1]。すなわち、（陰関数定理により $F(z,f(z))=0$ となるような）陰関数 $w=f(z)$ の存在が説明されれば、f を２つの実２変数関数の組 (u,v) と考えて、これらの拘束条件

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y)$$

の数から $4-2=2$次元 と解釈することができる。これらは一体どのような曲面であろうか。

5. 代数曲線論における円のかたち

例えば、円 $z^2+w^2-1=0(z,w\in \boldsymbol{C})$ がどのような曲面であるかは、この円から複素射影平面 $\boldsymbol{CP}^2$（複素数の連比全体の集合 $\{(Z:W:H)|z=Z/H,\ w=W/H\}$）上の直線 $w=0$（比（$Z:H$）全体の集合、つまり $\boldsymbol{CP}^1$、言い換えればリーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ と同一視される）へ

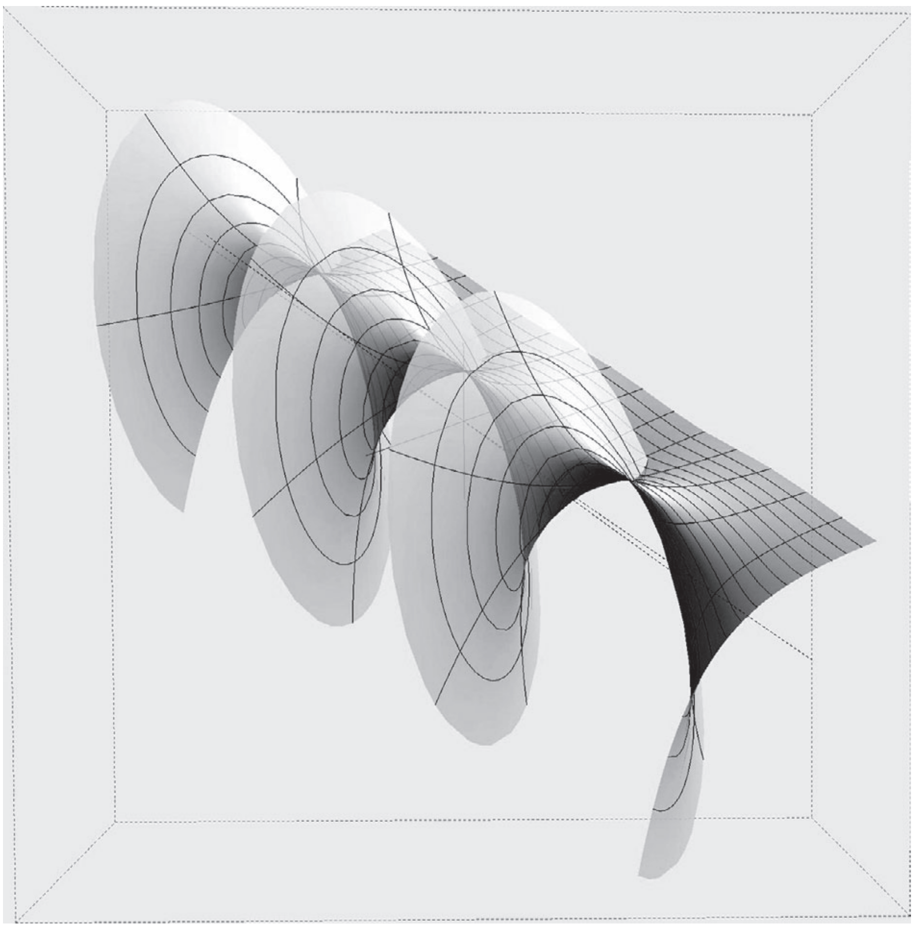

図５　直交形式による指数関数 e^z のグラフ

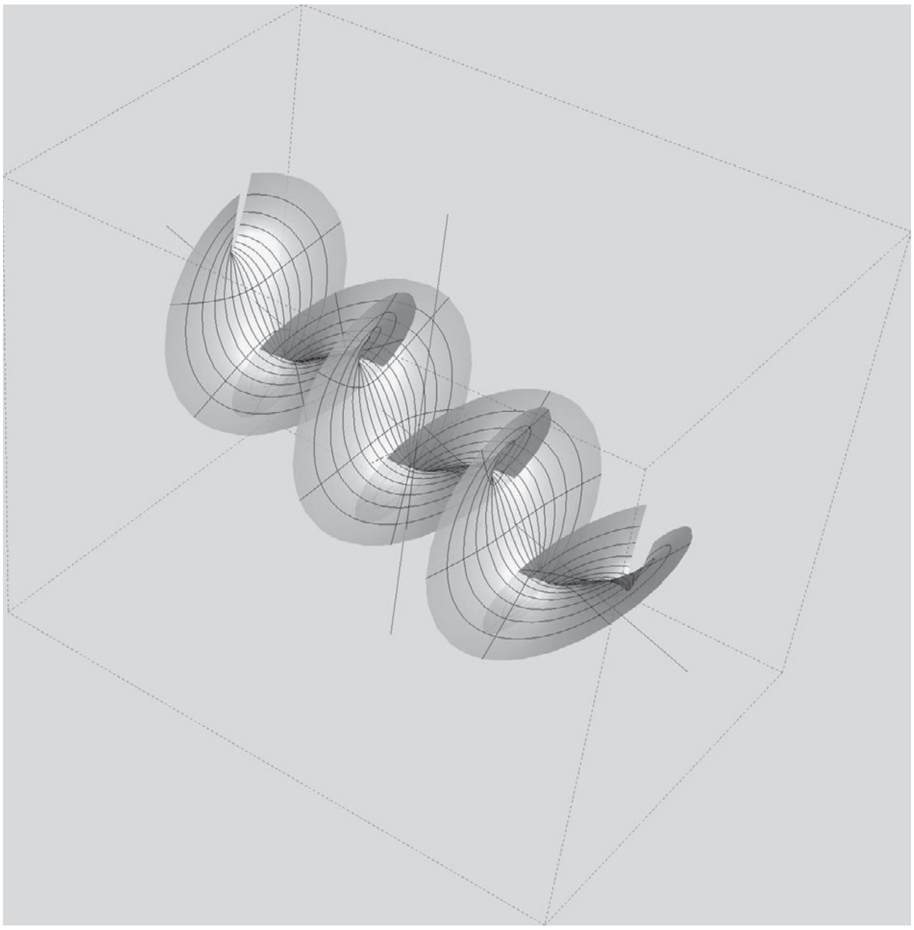

図６　直交形式による三角関数（余弦）cos z のグラフ

の写像 g

$$\begin{cases} Z=z, \\ W=0, \\ H=1-w \end{cases}$$

つまり図７の点（0, 1, 1）を中心とする極射影を定義

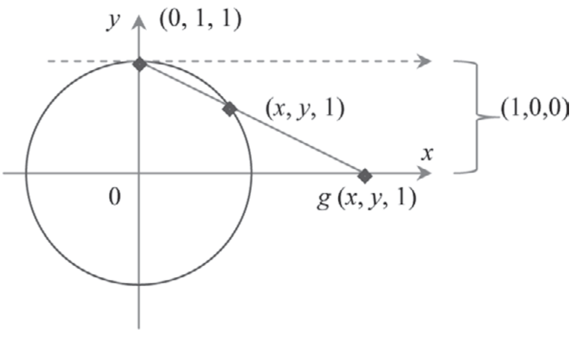

図７

するとき、この連続写像が全単射で、その逆写像 g^{-1}

$$\begin{cases} Z=2z', \\ W=z'^2-1, \\ H=z'^2+1 \end{cases}$$

も連続であるから、円はリーマン球面と位相同型（同相）になる[6]。

1900年代初頭に、米国特許庁に勤めながら、４次元空間の普及と可視化の考えに取り憑かれたイギリス人数学者 Charles Howard Hinton（1853, UK — 30 April 1907, Washington D.C., USA）は、高次元図形の可視化のためには、それらの影（shadows）を、断面図（cross-sections）を、そして分解（unravellings、展開図）を調べるという３つの方法に言及しているが[7, 8]、前述したような同相な位相空間の構造を明らかにすることが、代数曲線論（代数学、位相幾何学、複素関数論）における、実は（複素多様体の）４番目の可視化に他ならない。

6.　射影と制限による可視化について

このようにして、複素変数で考えたときの円はリーマン球面と同相になり、空間的構造は同じものとなったが、

4次元空間内の曲面から写像によって3次元（多様体が定義されている空間の次元は保存されないことに注意されたい）空間内の球面という、我々の目には容易に見える存在になったことと引き換えに失ったものは、具体的に何だろうか。

Hinton による3つの可視化のうち、前二者を現代数学の言葉では、それぞれ射影（projection）、制限（restriction）と言い表すのが普通である[1]。試みに、円

$$z^2+w^2-1=(x+iy)^2+(u+iv)^2=0 \tag{1}$$

をそのまま3次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ に射影したものと、4次元空間上で任意に選んだ3つの正規直交基底が張る直積空間、例えば

$$\boldsymbol{P}(=\{p\cos\theta, p\sin\theta, 0, 0|\theta\text{ は一定}\})\times\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}$$

に制限したものを、図8と9に示した。

後者の制限 $z^2+w^2-1=0|_{\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V}}$ については、(1) より

$$\begin{aligned}&(p^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+u^2-v^2)\\&\quad+2i(p^2\cos\theta\sin\theta+uv)=1+0i\end{aligned} \tag{1$'$}$$

であるから、特に $\theta=0$ の場合、このグラフィックスは3つに分かれた空間曲線

$$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t(0\leq t\leq 2\pi),\\z=0\end{cases}\begin{cases}x=\pm\cosh t\\y=0(t_{\min}\leq t\leq t_{\max})\\z=\sinh t\end{cases}$$

のレンダリングに帰着される。

ここで、以下に挙げるいくつかの円（と複素射影空間）にまつわるトピックスについて、我々はそれらの意味を、射影と制限による可視化から容易に理解することができるのである。

- 虚円 $z^2+w^2+1=0$（図10）
- 虚円点の所在を突き止める

円は虚円点 $(1, \pm i, 0)$ を通り、また2つの虚円点を通る2次曲線は円になるのと同様に、双曲線は実“双曲線”点 $(1, \pm 1, 0)$ を通り、また2つの実“双曲線”点を通る2次曲線は“双曲線”になることが証明できる。

- 交わらない二円の共通弦（ポンスレの射影幾何における“連続の原理”）[9]

二円が二点で交わり共通弦がある場合に対し、二円の

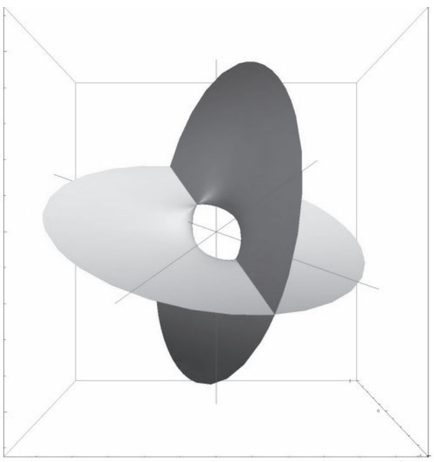

図8

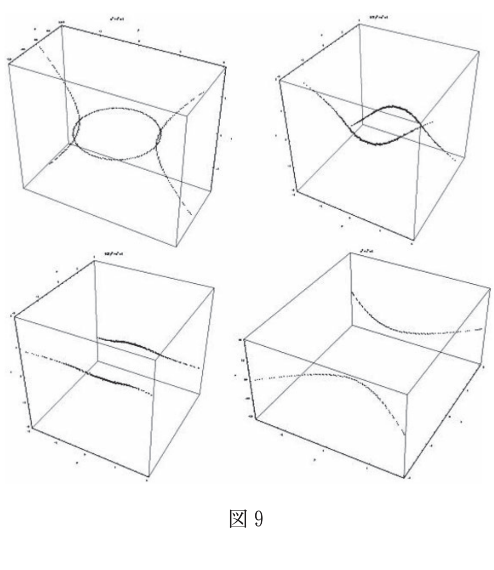

図9

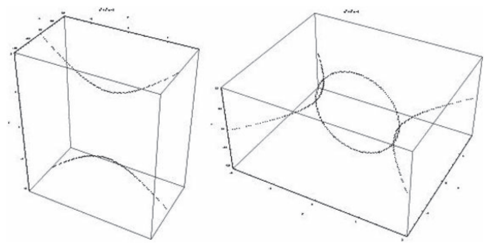

図10

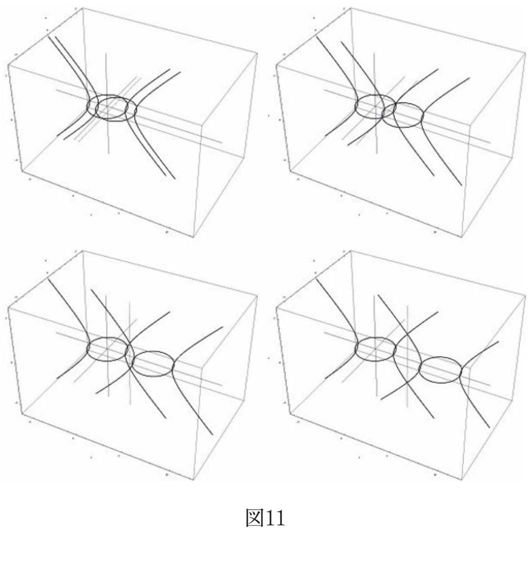

図11

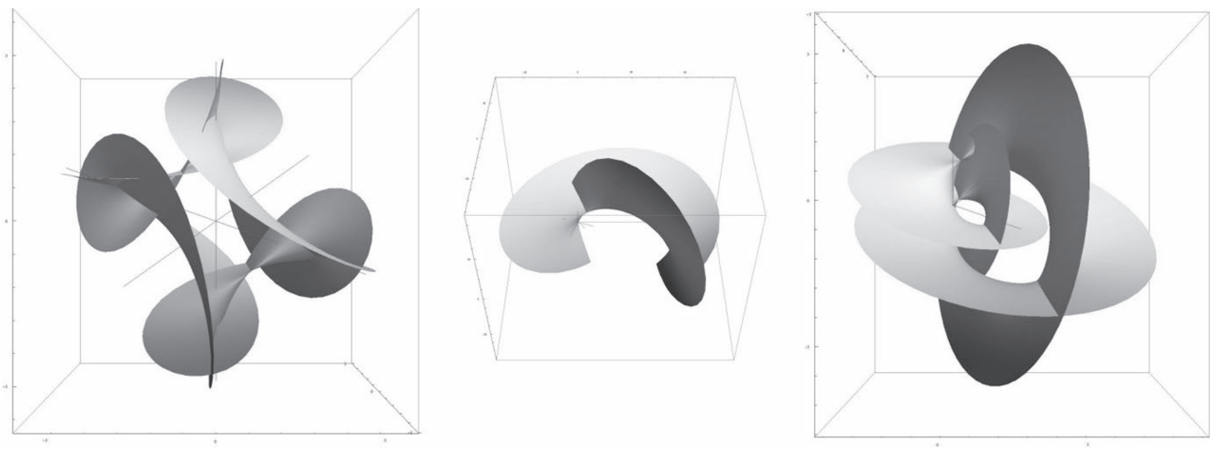

図12

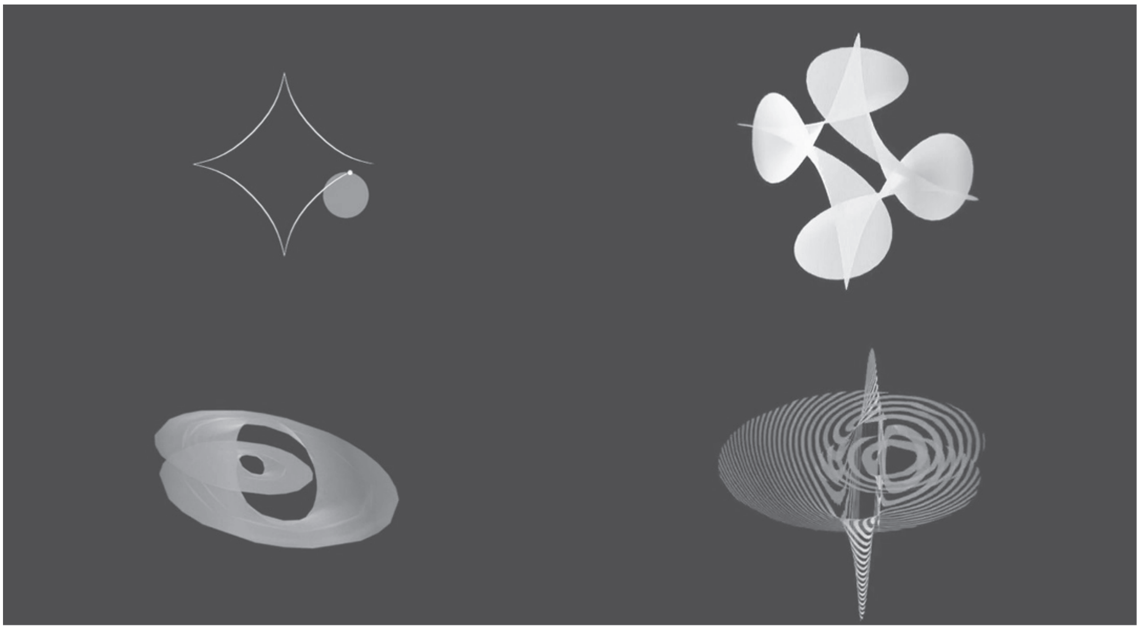

図13 「複素数のかたち」https://www.youtube.com/watch?v=CNcB4D9lsrw

中心がだんだん離れ、やがて二円が接しつぎに交わらなくなる。二円はそれぞれ

$$C_1\colon x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$
$$C_2\colon x^2+y^2+2g'x+2fy+c'=0$$

である。もしも交わる場合は（実は交わらない場合も）、共通弦は

$$C_1-C_2\colon 2(g-g')x+2(f-f)+(c-c')=0$$

である（図11）。

7. 映像作品「複素数のかたち」

ここでは、4次元図形の直観像を得るための1つの方法として、複素初等関数の可視化と、その“媒介変数で表された”または“極座標で表された”平面曲線への応用を、映像作品の上映を通じて改めて論じてみたい。

図13は、それぞれアストロイド、トロコイド、カージオイドを、複素パラメータによって解析的に延長したものである。作品では、これらのCGアニメーションの印象に合った音楽（4/4拍子から3/4、そしてポリリズムを使った4/4拍子で終止する）を付加している。

映像作品「複素数のかたち（Shapes of the Imaginariness）」シナリオとMathematicaレンダリング：宮澤　篤、櫻井いつ葉、サウンド演出：林　康、3ds Maxレンダリングと仕上げ：奈良島未来

8. まとめ

本稿の目的は、1次元複素多様体の可視化に関連するいくつかの研究を紹介し、分析手法や方法論を議論することである。古典的な数学のもう一つの見方を獲得するために最近の立体視システムを使用することは、教育的な改善に貢献するだけでなく、映像制作のための中心的なモチーフとなることも確かめられた。

文献

1）大野義夫、宮澤　篤：“コンピュータが見た複素函数”、数学セミナー、pp. 2–15、日本評論社（Nov. 1982）。
2）Milton Abramowitz et al., “Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables” [Paperback], cover page, Dover Publications（Jun. 1965）.
3）坪郷　勉：“複素数と4元数”、pp. 99–115、槙書店（Jun. 1967）。
4）Edwin A. Abbott, Flatland: “A Romance of Many Dimensions”（Dover Thrift Editions）, Dover Publications（Sept. 1992）.
5）エドウィン・アボット・アボット、イアン・スチュアート、冨永　星：“フラットランド”, 日経 BP 社（Mar. 2009）。
6）難波　誠、『代数曲線の幾何学』、現代数学社、1991.
7）Charles H. Hinton, Fourth Dimension（The Occult）（2nd edition）, Arno Pr, 1912.
8）Michio Kaku, Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps, and the 10th Dimension（Dover Thrift Editions）, pp. 68–74, Anchor, 1995.
9）津田丈夫、『数学ワンポイント双書 射影幾何』、pp. 25–27、共立出版、1981.